Ad-Soyad :

Numara : Cevap Anahtarı

Lineer Cebir I Final Sınavı Soruları **23.01.2024**

NOT : Süre 90 dakikadır. Cevaplarınızı ayrıntılı biçimde yazınız. Sınıfta öğretilmeyen yöntemler kabul edilmez. Başarılar dileriz.

1) Aşağıdaki ifadelerin yanına doğru ise D, yanlış ise Y yazınız.

(D) Lineer bağımsız bir kümenin her alt kümesi lineer bağımsızdır (2 p).

(Y) Tam sayılar kümesi reel sayılar cismi üzerinde vektör uzayıdır (2 p).

(Y) Düzlemde her doğru $\mathbb{R}^2$ nin bir alt vektör uzayıdır (2 p).

(D) Bir elementer matrisin determinantı sıfır olamaz (2 p).

(D) Bir kare matriste iki satır yer değiştirirse deteminant işaret değiştirir (2 p).

2) V, $\mathbb{R}$ üzerinde mertebesi üçten küçük veya eşit polinomların vektör uzayı olsun. $u = t^3 - 3t^2 + 5t + 1$, $v = t^3 - t^2 + 8t + 2$, $w = 2t^3 - 4t^2 + 9t + 5$ olmak üzere $\{u, v, w\} \subset V$ alt kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız (20 p).

3) $(1,1,1)$ vektörünün $v_1 = (4,2,-3)$, $v_2 = (2,1,-2)$, $v_3 = (-2,-1,0)$ vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak yazılıp yazılamayacağını belirleyiniz (10 p).

4) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) Elementer işlemlerle A matrisinden üçgensel bir R matrisi elde ediniz (7 p).

b) detR=? (6 p)

c) A nın determinantını hesaplamadan detA ile detR arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız (7 p).

5) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ kümesi veriliyor.

a) U nun $\mathbb{R}^3$ ün alt vektör uzayı olup olmadığını araştırınız (10 p).

b) U için bir baz bulunuz (10 p).

6) A, 3x3 lük bir üst üçgensel matris olsun. A nın tersi olduğunu kabul edelim. Bu durumda, A nın tersinin de üst üçgensel matris olduğunu gösteriniz (10 p).

Soru2: $u = t^3 - 3t^2 + 5t + 1$, $v = t^3 - t^2 + 8t + 2$, $w = 2t^3 - 4t^2 + 9t + 5$ o.ü

$xu + yv + zw = 0$ iken $x = y = z = 0$ mı bunu inceleyelim.

$$x(t^3 - 3t^2 + 5t + 1) + y(t^3 - t^2 + 8t + 2) + z(2t^3 - 4t^2 + 9t + 5) = 0$$

$$(x + y + 2z)t^3 + (3x - y - 4z)t^2 + (5x + 8y + 9z)t + (x + 2y + 5z) = 0$$

olup her mertebede t nin katsayıları sıfır olmalıdır. O halde

$$x + y + 2z = 0$$
$$-3x - y - 4z = 0$$
$$5x + 8y + 9z = 0$$
$$x + 2y + 5z = 0$$

lineer denklem sistemi çözülürse

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 5 & 8 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-5R_1+R_3 \\ -R_1+R_4}]{-3R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{2}R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2+R_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3+R_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O halde $\boxed{z = 0}$

$2y + 2z = 0$

$2y = -2z$

$\boxed{y = 0}$

$x + y + 2z = 0$

$\boxed{x = 0}$

O halde $x = y = z = 0$ olduğundan $\{u, v, w\}$ V de lineer bağımsızdır.

CamScanner ile tarandı

Soru 3: $(1,1,1) \overset{?}{=} a.v_1 + bv_2 + c.v_2$ inceleyelim

$$(1,1,1) = a.(4,2,-3) + b(2,1,-2) + c.(-2,-1,0)$$

$$4a + 2b - 2c = 1$$

$$2a + b - c = 1$$

$$-3a - 2b = 1$$

Bu lineer denklem sistemini çözelim.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -2 & 1 \\ \boxed{0 & 0 & 0 & 1/2} \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

olup $0 \neq \frac{1}{2}$ olduğundan bu lineer denklem sisteminin çözümü yoktur. Dolayısıyla $(1,1,1)$, $\{v_1, v_2, u_3\}$ vektörlerinin lineer birleşimi şeklinde yazılamaz

CamScanner ile tarandı

Soru 4:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a)
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{4}R_1+R_3]{-\frac{1}{2}R_1+R_2} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 5/2 & -3/2 \\ 0 & \frac{11}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{11}{10}R_2+R_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{29}{10} \end{bmatrix}}_{R}$$

b) $\det R = \cancel{4}^{2} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{2}} \cdot \frac{29}{\cancel{10}} = 29$

c) A matrisinin belirli satırlarını reel sayı ile çarpıp diğer satıra eklediğimiz için A ile R matrislerinin determinantları aynı olup

$\det A = \det R$ dır.

CamScanner ile tarandı

Soru 5: a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0\}$ $\mathbb{R}^3$ un alt vektör uzayı mıdır?

$U \subset \mathbb{R}^3$ ve $U \neq \emptyset$, $(0,0) \in U$.

i) $(x,y,z), (p,r,s) \in U \Rightarrow (x,y,z)+(p,r,s) \overset{?}{\in} U$

$(x,y,z)+(p,r,s) = (x+p, y+r, z+s)$ olup

$x+p+y+r=0$ olmalıdır

$(x,y,z) \in U \Rightarrow x+y=0$ $(p,r,s) \in U$ ise $p+r=0$

$$x+p+y+r = 0$$ dır

ii) $(x,y,z) \in U$ iken $c.(x,y,z) \overset{?}{\in} U$

$(x,y,z) \in U$ ise $x+y=0$ dır.

$c(x,y,z) = (cx, cy, cz)$ olup $\in U$ olması için $cx+cy=0$ olmalı.

$cx+cy = c.\underbrace{(x+y)}_{0} = 0$ olup istenilen elde edilir. O halde

U, $\mathbb{R}^3$ un alt vektör uzayıdır.

b) U için bir baz bulalım.

$x+y=0 \Rightarrow x=-y$ olduğundan

$U = \{(x,-x,z) \in \mathbb{R}^3 : x,z \in \mathbb{R}\}$ şeklinde yazabiliriz.

$(x,-x,z) = x(1,-1,0) + z(0,0,1)$ olup $(1,-1,0)$ ve $(0,0,1)$ germeyi sağlar.

Aynı zamanda $c_1(1,-1,0)+c_2(0,0,1)=0$ iken $c_1=c_2=0$ olup

$\{(1,-1,0),(0,0,1)\}$ sistemi lineer bağımsız olup U için bir bazdır.

Soru 6: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ üst üçgensel matris olsun.

A matrisinin tersini A^{-1} kabul edelim.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A} \quad \text{olup}$$

A^{-1} var olduğundan $\det A \neq 0$ dır

$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} \neq 0$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} a_{33}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} a_{33}$$

$A_{22} = a_{11} a_{33}$

$A_{23} = 0$

$A_{31} = a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}$

$A_{32} = -a_{11} a_{23}$

$A_{33} = a_{11} a_{22}$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{22} a_{33} & 0 & 0 \\ -a_{12} a_{33} & a_{11} a_{33} & 0 \\ a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13} & -a_{11} a_{23} & a_{11} a_{22} \end{bmatrix}^t$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{22} a_{33} & -a_{12} a_{33} & a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13} \\ 0 & a_{11} a_{33} & -a_{11} a_{23} \\ 0 & 0 & a_{11} a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11} a_{22} a_{33}} \tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \frac{-a_{12}}{a_{11} a_{22}} & \frac{a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}}{a_{11} a_{22} a_{33}} \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & -a_{23}/a_{22} a_{33} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} \end{bmatrix}$$

olup üst üçgensel matristir.

CamScanner ile tarandı